Formulario di Matematica
v.5.1$\beta - \rho\varepsilon$!

Daniele Angella[1]

20 aprile 2005

[1]daniele.angella@gmail.com

0.1 Prefazione

> Perché avete usurpato il ruolo degli dèi che in altri tempi guidarono la condotta degli uomini, senza arrecare conforti soprannaturali, ma soltanto la terapia delle grida più irrazionali: il centravanti verrà ucciso all'imbrunire.
> Perché il vostro centravanti è lo strumento che adoperate per sentirvi dèi che gestiscono vittorie e sconfitte dalla comoda poltrona di cesari minori: il centravanti verrà ucciso all'imbrunire.
> Perché l'imbrunire è la tarda ora in cui scendono i bioritmi dell'entusiasmo, e lo sgozzamento e il rantolo suonano come una musica non meno truce che malinconica: il centravanti verrà ucciso all'imbrunire.
>
> M.V. Montalban, *Il Centravanti è stato assassinato verso sera*

Questo documento è stato scritto con LaTeX ed è disponibile sui siti

`http://www.matematicamente.it`;

`http://daniangella.interfree.it`;

`http://edu.os3.it`.

Ogni commento, suggerimento o correzzione è ben accetto.

Grazie a chi mi ha aiutato nella correzione: Daniele Marconi (`daniele.marconi@email.it`), Leonardo Ferro (`leonardoferro@gmail.com`).

Parte I

Formulario

Capitolo 1

Logica e Insiemistica

1.1 Logica

1.1.1 Definizioni

Definizione 1 (Proposizione, Enunciato) *Si dice* proposizione *(o* enunciato*) un'espressione del linguaggio naturale per cui sia possibile attribuire un valore di verità (vero=T=1=$\top$; falso=F=0=$\bot$). Una proposizone si dice* complessa *se é composta da proposizioni* semplici *collegate tra loro da* connettivi logici*.*

Definizione 2 (Predicato) *Si dice* predicato *una frase contenente variabili che diventi una proposizione qualora si specifichi il valore delle variabili stesse.*

1.1.2 Connettivi Logici

- **non** $\neg$ (oppure: $\neg p \equiv \bar{p}$); unario; complementare; $\neg p$ ha valore vero sse p ha valore falso;

- **e** $\wedge$; binario; intersezione; $p \wedge q$ ha valore vero sse p e q hanno entrambi valore vero;

- **o** $\vee$; binario; unione; $p \vee q$ ha valore vero se almeno uno tra p e q ha valore vero;

- **se ... allora, implica, condizione sufficiente affinchè q..., condizione necessaria affinchè p...** $\Longrightarrow$; binario; $p \Longrightarrow q$ ha valore vero se p ha valore falso o se sia p che q hanno valore vero;

- **se e solo se (sse, iff), coimplica, condizione necessaria e sufficiente (cnes)** $\Longleftrightarrow$; binario; $p \Longleftrightarrow q$ ha valore vero se p ha lo stesso valore di verità di q.

1.1.3 Tabelle di Verità

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Longrightarrow q$	$p \Longleftrightarrow q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Tabella 1.1: Tavole di Verità

1.1.4 Leggi logiche notevoli

☛ Tabella **??** a pag.**??**

1.2 Insiemistica

Definizione 3 (Insieme) $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = \{x | \mathcal{P}(x)\}$.

Definizione 4 (Intersezione) $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$

Definizione 5 (Unione) $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$

Definizione 6 (Differenza) $A \setminus B = \{x | x \in A \wedge \neg(x \in B)\}$

Definizione 7 (Differenza simmetrica) $A \Delta B = A \setminus B \cup B \setminus A$

Definizione 8 (Complementare) *Detto $\mathcal{U}$ l'insieme universo,* $A^c = cA = \bar{A} = \{x | x \in U \setminus A\} = \{x | \neg(x \in A)\}$

Definizione 9 (Insieme (potenza) delle parti) $\mathcal{P}(A) = 2^A = \{E | E \subseteq A\}$
$\mathcal{P}(A) = 2^A$

Definizione 10 (Coppie ordinate) $(x, y) = \langle x, y \rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$

Definizione 11 (Prodotto cartesiano) $A \times B = \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\}$
$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) | x_i \in A_i \forall i = \{1, 2, \cdots, n\}\}$

Proposizione 1 (Leggi di de Morgan) $(E \cup F)^c = E^c \cap F^c$
$(E \cap F)^c = E^c \cup F^c$

$A \Rightarrow A$	legge dell'identità
$A \Leftrightarrow \neg\neg A$	legge della doppia negazione
$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$	commutatività di $\wedge$
$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$	associatività di $\wedge$
$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$	commutatività di $\vee$
$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$	associatività di $\vee$
$A \wedge A \Leftrightarrow A$	idempotenza di $\wedge$
$A \vee A \Leftrightarrow A$	idempotenza di $\vee$
$A \wedge B \Leftrightarrow A$	eliminazione di $\wedge$
$A \Leftrightarrow A \vee B$	introduzione di $\vee$
$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	distributività
$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	distributività
$A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$	legge di assorbimento
$A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$	legge di assorbimento
$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$	legge di de Morgan
$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$	legge di de Morgan
$\neg A \vee A \Leftrightarrow \top$	legge del terzo escluso
$\neg(A \wedge \neg A) \Leftrightarrow \top$	legge di non contraddizione
$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (B \Rightarrow \neg A)$	definizione di implicazione
$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$	legge di contrapposizione (contronominale)
$A \wedge \neg A$	Lewis (ex falso quodlibet)
$A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$	affermazione del conseguente
$\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$	negazione dell'antecedente
$((A \Rightarrow B) \wedge \neg B) \Rightarrow \neg A$	legge di riduzione all'assurdo
$(A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow \neg A$	riduzione all'assurdo debole
$(\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A$	consequentia mirabilis
$((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$	legge di Peirce
$((A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)) \Rightarrow \top$	legge di Dummett
$A \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$	modus ponens
$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Leftrightarrow (B \Rightarrow (A \Rightarrow C))$	scambio antecedenti
$((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)) \Leftrightarrow (A \vee B \Rightarrow C)$	distinzione di casi
$((A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$	distinzione di casi
$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$	distributività di $\Rightarrow$
$((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$	transitività di $\Rightarrow$
$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \Rightarrow C)$	importazione/esportazione delle premesse

Tabella 1.2: Leggi Logiche Notevoli

Capitolo 2

Algebra Elementare

2.1 Definizione di $\mathbb{R}$

La struttura $[\mathbb{R}, +, \cdot]$ è un anello. Si definisce una relazione d'ordine totale $\leq$. I primi 4 assiomi definiscono $[\mathbb{R}, +]$ come gruppo, $[\mathbb{R}\backslash\{0\}]$ come gruppo, inoltre vale l'assioma di continuità in una delle sue 4 forme.
R è quindi definito assiomaticamente da:

S1 la somma è associativa;

S2 la somma è commutativa;

S3 esiste l'elemento neutro della somma (zero, 0);

S4 ogni elemento (x) di $\mathbb{R}$ ha inverso (opposto, $-x$);

P1 il prodotto è associativo;

P2 il prodotto è commutativo;

P3 esiste l'elemento neutro del prodotto (uno, 1);

P4 ogni elemento (x) di $\mathbb{R} \setminus 0$ ha elemento inverso (reciproco, $\frac{1}{x} = 1/x = x^{-1}$);

SP il prodotto è distributivo rispetto alla somma;

OS $x \leq y \Rightarrow$x+z$\leq y + z \forall z \in \mathbb{R}$;

OP $x \leq y \Rightarrow$x$\dot{z} \leq y\dot{z} \forall z \in \mathbb{R}, z \geq 0$;

Dedekind siano A e B due insiemi separati, cioè tali che $\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq b$; allora $\exists c \in \mathbb{R} : a \leq b \leq c$.

Definizione 12 (Retta reale estesa) *Si definisce l'insieme* $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *detto* estensione dell'insieme dei reali.

2.2 Scomposizioni Notevoli

2.2.1 Potenza di un polinomio

$$(a \pm b)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) a^{n-k} b^k$$

Casi particolari: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;
$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$;
$(a \pm b \pm c)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \pm 2bc + c^2 \pm 2ca$.

2.2.2 Fattorizzazione

$$\mathcal{P}(x) = a_n \cdot \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$$

$\mathcal{P}(x) = a(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \cdots \cdot (x - x_n)$
$\forall n \in \mathbb{N} : x^n - y^n = (x - y) \cdot (x^{n-1} + x^{n.2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$
$\forall n = 2k+1, k \in \mathbb{Z} : x^n + y^n = (x+y) \cdot (x^{n-1} - x^{n-2}y + \cdots - xy^{n-2} + y^{n-1})$

Casi particolari: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$;
$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.

2.2.3 Risoluzione di equazioni di secondo grado in una incognita

$\mathcal{P}(x) = ax^2 + bx + c$: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$;
$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - ac}}{a}$ con $\beta := \frac{b}{2}$

2.3 Radicali doppi

$\sqrt{\mathcal{A} \pm \sqrt{\mathcal{B}}} = \sqrt{\frac{\mathcal{A} + \sqrt{\mathcal{A}^2 - \mathcal{B}}}{2}} \pm \sqrt{\frac{\mathcal{A} - \sqrt{\mathcal{A}^2 - \mathcal{B}}}{2}}$

2.4 Disequazioni irrazionali

– $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq g^2(x) \end{cases} \cup \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

– $\sqrt{f(x)} < g(x)$

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}$$

2.5 Potenze

2.5.1 Definizione

Definizione 13 (Logaritmo) *$\forall y \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, si definisce la radice n-esima di y come:*
$\sqrt[n]{y} = y^{1/n} = sup\{x \in \mathbb{R} : x^n < y\} = inf\{x \in \mathbb{R} : x^n > y\}$

2.5.2 Proprietà

$a^0 = 1$
$a^1 = a$
$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$
$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
$a^m = e^{m \cdot \log a}$
$a^{\frac{1}{n}} =^n \sqrt{a}$
$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

2.6 Logaritmi

2.6.1 Definizione

Definizione 14 (Logaritmo) $a = \log_b c \Leftrightarrow b^a = c$

2.6.2 Proprietà

$\log_a 1 = 0$
$\log_a a = 1$
$\log_a (m \cdot n) = \log_a m + \log_a n$
$\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$
$\log_a m^\alpha = \alpha \cdot \log_a m$ con $\alpha \in R$
$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$
$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

2.7 Modulo o Valore Assoluto

2.7.1 Definizione

Definizione 15 (Modulo, Valore Assoluto) *Si definisce* modulo *p* valore assoluto *la funzione:*
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty]$
$f(x) = |x| = mod(x) = max\{x, -x\} = \sqrt{x^2}$.

2.7.2 Proprietà

M1 $\forall a \in \mathbb{R}, |a| \geq 0$

M2 $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

M3, omogeneità $\forall \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}, |\lambda \cdot a| = |\lambda| \cdot |a|$

M4, disuguaglianza triangolare $\forall a, b \in \mathbb{R}, |a + b| \leq |a| + |b|$

La `M4` in generale assume la forma:

$$|\sum_{i=1}^{n} a_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|$$

2.8 Altre funzioni

2.8.1 Fattoriale, Semifattoriale

Definizione 16 (Fattoriale) $\forall n \in \mathbb{N}, n! = fatt(n) = \prod_{i=1}^{n} i = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n$.
É definito ricorsivamente da:
$\begin{cases} 0! = 1 \\ n! = n \cdot (n-1)! \end{cases}$

Definizione 17 (Semifattoriale) $\forall k \in \mathbb{N}, (2k+1)!! = \prod_{i=0}^{k} (2i+1);$
$(2k)!! = \begin{cases} 1 & se\ k=0 \\ \prod_{i=1}^{k} & se\ k>0 \end{cases}$
$Sidefinisceinoltre (-1)!! = 1.$

2.8.2 Segno

Definizione 18 (Segno) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, signum(x) = sign(x) = sgn(x) = \frac{x}{|x|} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & se\ x > 0 \\ -1 & se\ x < 0 \end{cases}$

2.8.3 Parte intera, parte decimale

Definizione 19 (Parte Intera) $x \overset{def}{=} max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$

Definizione 20 (Parte Decimale) $\{x\} \overset{def}{=} x - x$

2.8.4 Parte positiva, Parte negativa

Definizione 21 (Parte positiva, f^+) $f^+ = \mathit{max}\{f, 0\}$

Definizione 22 (Parte negativa, f^-) $f^- = \mathit{min}\{f, 0\}$

Osservazione 1 $|f| = f^+ - f^-$
$f = f^+ + f^-$

Osservazione 2 $a, b \in \mathbb{R} : a < b$,
$b^+ - a^+ \leq b - a$;
$b^- - a^- \leq b - a$

2.8.5 Funzione di Dirichlet

Definizione 23 (Funzione di Dirichlet) $f(x) = \begin{cases} \mathit{1} & se\ x \in \mathbb{Q} \\ \mathit{0} & se\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

2.8.6 Funzioni iperboliche

Definizione 24 (Seno iperbolico) $: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\sinh x = \mathit{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Definizione 25 (Coseno iperbolico) $\cosh : \mathbb{R} \to [1, +\infty)$
$\cosh x = \mathit{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Osservazione 3 $\sinh^2 x - \cosh^2 x = 1.$

Definizione 26 (Tangente iperbolica) $\tanh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\tanh x = \mathit{th}x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$

Definizione 27 (Cotangente iperbolica) $\coth : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$
$\coth x = \mathit{cth}x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$

Definizione 28 (Arcoseno iperbolico, Settore Seno iperbolico) $\mathit{ash} :$
$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\mathit{sett\ sinh}y = \mathit{ash}y = \log(y + \sqrt{y^2 + 1})$

Definizione 29 (Arcocoseno iperbolico, Settore Coseno iperbolico)
$\mathit{ach} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\mathit{sett\ cosh}y = \mathit{ach}y = \log(y + \sqrt{y^2 - 1})$

Definizione 30 (Arcotangente iperbolica, Settore Tangente iperbolica)
$\mathit{ath} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\mathit{sett\ tanh}x = \mathit{ath}y = \frac{1}{2} \cdot \log \frac{1+x}{1-x}$

2.8.7 Funzione Esponenziale, $e^x = \mathsf{exp}(x)$

Teorema 1 (Esistenza ed Unicità della funzione esponenziale) $\exists!$ *la funzione* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *che verifichi le proprietà:*

1. $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$*;*

2. $f(1) = e$ *(dove* e *è il* numero di Nepero*);*

ed è la funzione esponenziale *definita* $\forall x \in \mathbb{R}$ *da* $f(x) = e^x = \mathsf{exp}(x)$*.*

Definizione 31 *Si definisce* $f(x) = a^x = e^{x \log a}$*.*

2.9 Serie

2.9.1 Serie Aritmetiche

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2}$$

2.9.2 Serie Geometriche

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$ con q $\neq 1$

Se $q = 1$ si ha $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = n \cdot a_1$

$S_{k,n} = \sum_{i=k}^{n} a_i = q^k \cdot \frac{1 - q^{n-k+1}}{1 - q}$ con q $\neq 1$

2.9.3 Disuguaglianze Notevoli

- $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], |\sin x| \leq |x|$

- $\forall n \in \mathbb{N}, \forall a \geq -1, (1+a)^n \geq 1 + a \cdot n$ (**disuguaglianza di Bernoulli**)

- $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$

- $\forall x > -1, \log(x+1) \leq x$

- $\forall a, b > 0, p, q > 1 : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, a \cdot b \leq \frac{1}{p} \cdot a^p + \frac{1}{q} \cdot b^q$ (**disuguaglianza di Young**)

2.9.4 Sommatorie Classiche

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$$

$$\sum_{i=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ i \end{array} \right) = (1+1)^n = 2^n$$

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \left(\begin{array}{c} n \\ i \end{array} \right) = 0$$

Capitolo 3

Geometria

3.1 Goniometria

3.1.1 Relazione Fondamentale

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

3.1.2 Tangente e Cotangente: Definizioni

Definizione 32 (Tangente) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Definizione 33 (Cotangente 1) $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \forall x \neq k\pi$

Definizione 34 (Cotangente 2) $\cot x = \frac{1}{\tan x} \forall x \neq k\frac{\pi}{2}$

3.1.3 Secante e Cosecante: Definizioni

Definizione 35 (Secante) $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$
$\sec : \mathbb{R} \setminus \{\frac{pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$

Definizione 36 (Cosecante) $\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$
$\csc : \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$

3.1.4 Formule di Addizione

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$
$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$
$\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta \mp 1}{\cot \alpha \pm \cot \beta}$

3.1.5 Formule di Duplicazione e di Triplicazione

$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$
$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$
$\sin(3\alpha) = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$
$\cos(3\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$
$\tan(3\alpha) = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$

3.1.6 Formule di Bisezione

$\sin(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$
$\cos(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$
$\tan(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

3.1.7 Formule Parametriche

$$t \stackrel{def}{=} \tan\frac{\alpha}{2} \longrightarrow \begin{cases} \sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \tan\alpha = \frac{2t}{1-t^2} \end{cases}$$

3.1.8 Formule di Prostaferesi

$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$
$\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$
$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$
$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$

3.1.9 Formule di Werner

$\cos p \cdot \sin q = \frac{1}{2}[\sin(p+q) - \sin(q-p)]$
$\sin p \cdot \sin q = \frac{1}{2}[\sin(p-q) - \cos(p+q)]$
$\cos p \cdot \cos q = \frac{1}{2}[\cos(p+q) + \cos(p-q)]$

3.1.10 Formule di Conversione

☛ Tabella **??** a pag.**??**

3.1.11 Archi Noti

☛ Tabella **??** a pag.**??**

$\swarrow$	Sin	Cos	Tan
$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\pm\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$
$\cos\alpha$	$\pm\sqrt{1-sin^2\alpha}$	$\cos\alpha$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$
$\tan\alpha$	$\pm\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	$\tan\alpha$
$\cot\alpha$	$\pm\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\pm\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{1}{\tan\alpha}$
$\sec\alpha$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\frac{1}{\cos\alpha}$	$\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}$
$\csc\alpha$	$\frac{1}{\sin\alpha}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\pm\frac{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}{\tan\alpha}$

Tabella 3.1: Formule di Conversione

Rad	Deg	Sin	Cos	Tan	Cot
0	$0°$	0	1	0	n.e.
$\frac{\pi}{12}$	$15°$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{8}$	$22°30'$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}+1$
$\frac{\pi}{6}$	$30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	$60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{3}{8}\pi$	$67°30'$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}+1$	$\sqrt{2}-1$
$\frac{5}{12}\pi$	$75°$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	$90°$	1	0	n.e.	0

Tabella 3.2: Archi noti

Rad	Sin	Cos	Tan	Cot
x	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
$\pi - x$	$\sin x$	$-\cos x$	$-\tan x$	$-\cot x$
$\pi + x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
$-x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\tan x$	$-\cot x$
$2\pi - x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\tan x$	$-\cot x$
$\frac{\pi}{2} - x$	$\cos x$	$\sin x$	$\cot x$	$\tan x$
$\frac{\pi}{2} + x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cot x$	$-\tan x$
$\frac{3}{2}\pi - x$	$-\cos x$	$-\sin x$	$\cot x$	$\tan x$
$\frac{3}{2}\pi + x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\cot x$	$-\tan x$

Tabella 3.3: Archi associati

3.1.12 Archi Associati

☛ Tabella ?? a pag.??

3.2 Trigonometria

3.2.1 Triangolo Qualsiasi

Area: $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta$

$S = \frac{1}{2}a^2\frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)} = \frac{1}{2}b^2\frac{\sin\alpha\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)} = \frac{1}{2}c^2\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$

Teorema 2 (Formula di Erone) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Teorema 3 (Formula di Brahmagupta o di Erone per quadrilateri ciclici) *Dato un quadrilatero ciclico (cioè inscrivibile in una circonferenza) di lati* a, b, c, d *e semiperimetro* $p = \frac{a+b+c+d}{2}$*, l'area vale* $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$*; per* $d = 0$*, in particolare, si ottiene la formula di Erone per il triangolo.*

Teorema 4 (delle Corde) *:* $\bar{AB} = 2r\sin\alpha$

Teorema 5 (dei Seni) *:* $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin\alpha} = 2R = \frac{abc}{4S}$

Proiezioni: $a = b\cos\gamma + c\cos\beta$;
$b = a\cos\gamma + c\cos\alpha$;
$c = a\cos\beta + b\cos\alpha$.

Teorema 6 (di Carnot o del Coseno) *:*
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$*;*
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$*;*
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$*.*

3.2.2 Triangolo Rettangolo

Se a,b e c sono le misure rispettivamente dell'ipotenusa e dei cateti di un triangolo rettangolo e α , β e γ sono le misure degli angoli opposti, sussistono le seguenti relazioni:

$b = a\sin\beta = a\cos\gamma$
$c = a\sin\gamma = a\cos\beta$
$b = c\tan\beta = c\cot\gamma$
$c = b\tan\gamma = b\cot\beta$

3.3 Geometria Analitica

3.3.1 Punto e Retta

r: $y = mx + n$ (forma implicita)
$y = ax + by + c$ (forma esplicita); $m = -\frac{b}{a}$, $n = -\frac{c}{a}$

$P_1(x_1, y_1)P_2(x_2, y_2)P_3(x_3, y_3)$

r_{P_1}: $(y - y_1) = m(x - x_1)$
$s \parallel r_{P_1}$:$y_1 = m_{const}x_1 + n$
$r_{P_1P_2}: \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$
$m_r = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$
$r \parallel s \leftrightarrow m_r = m_s$
$r \perp s \leftrightarrow m_r = -\frac{1}{m_s}$
$P_1\bar{P}_2 = dist(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$
$dist(P_1, r) = \frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$
Punto medio di $P_1P_2 = (\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2})$
Baricentro del triangolo $P_1P_2P_3 = (\frac{x_1+x_2+x_3}{3}; \frac{y_1+y_2+y_3}{3})$

3.3.2 Coniche 1: Circonferenza

$$\gamma : x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$C(x_0, y_0)$ $r^2 = x_0^2 + y_0^2 - c \geq 0$
$P(x', y') \in \gamma \leftrightarrow \bar{(}PC) = r$
$\gamma : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

$$\begin{cases} a = -2x_0 \\ b = -2y_0 \\ c = x_0^2 + y_0^2 - r^2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_0 = -\frac{a}{2} \\ y_0 = -\frac{b}{2} \\ r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c} \end{cases}$$

3.3.3 Coniche 2.1: Parabola con asse parallelo all'asse y

$$\mathcal{P} : y = ax^2 + bx + c$$

$F(x_0, y_0)$; $d : y = k$
$P(x', y') \in \mathcal{P} \leftrightarrow dist(P, F) = dist(P, d)$

$$\left\langle \begin{array}{lllll} y_0 > k & \rightarrow & a > 0 & \rightarrow & \smile \\ y_0 < k & \rightarrow & a < 0 & \rightarrow & \frown \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2y_0-2k} \\ b = \frac{x_0}{k-y_0} \\ c = \frac{x_0^2+y_0^2-k^2}{2y_0-2k} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_0 = -\frac{b}{2a} \\ y_0 = \frac{1-\Delta}{4a} \\ k = \frac{-1-\Delta}{4a} \end{cases}$$

$F(-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a})$
$d : y = \frac{-1-\Delta}{4a})$
$F(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$
$a : x = -\frac{b}{2a}$
$\Delta = b^2 - 4ac$

3.3.4 Coniche 2.2: Parabola con asse parallelo all'asse x

$$\mathcal{P} : x = ay^2 + by + c$$

$F(x_0, y_0); \qquad d : y = k$
$P(x', y') \in \mathcal{P} \leftrightarrow dist(P, F) = dist(P, d)$
$\left\langle \begin{array}{lllll} x_0 > k & \to & a > 0 & \to & \subset \\ x_0 < k & \to & a < 0 & \to & \supset \end{array} \right.$
$\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{1}{2x_0 - 2k} \\ b = \frac{y_0}{k - x_0} \\ c = \frac{x_0^2 + y_0^2 - k^2}{2x_0 - 2k} \end{array} \right. \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_0 = \frac{1-\Delta}{4a} \\ y_0 = -\frac{b}{2a} \\ k = \frac{-1-\Delta}{4a} \end{array} \right.$
$F(\frac{1-\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a})$
$d : y = \frac{-1-\Delta}{4a})$
$F(-\frac{\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a})$
$a : y = -\frac{b}{2a}$
$\Delta = b^2 - 4ac$

3.3.5 Coniche 3: Ellisse

$$\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$c^2 = \left\{ \begin{array}{llllllll} a^2 - b^2 & \text{se} & a > b & \to & e = \frac{c}{a} < 1 & \to & F_1(-c, 0), & f_2(c, 0) \\ b^2 - a^2 & \text{se} & b > a & \to & e = \frac{c}{b} < 1 & \to & F_1(0, -c), & f_2(0, c) \end{array} \right.$
$\mathcal{E} \cap x \equiv \qquad A(-a, 0) \quad B(a, 0)$
$\mathcal{E} \cap y \equiv \qquad C(0, -b) \quad D(0, b)$
$P(x', y') \in E \leftrightarrow \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$

3.3.6 Coniche 4.1.1: Iperbole riferita ai suoi assi di simmetria con fuochi sull'asse x

$$\mathcal{I} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$c^2 = a^2 + b^2, \quad c \geq 0$
$\mathcal{I} \cap x \equiv \qquad V_1(-a, 0) \quad V_2(a, 0)$
$F_1(-c, 0) \quad F_2(c, 0); \qquad F_1, F_2 \in x$
$P(x', y') \in \mathcal{I} \leftrightarrow |\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a$
$a_1 : y = \frac{b}{a}x$
$a_2 : y = -\frac{b}{a}x$
$e = \frac{c}{a} > 1$

3.3.7 Coniche 4.1.2: Iperbole riferita ai suoi assi di simmetria con fuochi sull'asse y

$$\mathcal{I} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

$c^2 = a^2 + b^2, \quad c \geq 0$
$\mathcal{I} \cap x \equiv \qquad V_1(0, -b) \quad V_2(0, b)$
$F_1(0, -c) \quad F_2(0, c); \qquad F_1, F_2 \in y$
$P(x', y') \in \mathcal{I} \leftrightarrow |\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a$
$a_1 : y = \frac{b}{a}x$
$a_2 : y = -\frac{b}{a}x$
$e = \frac{c}{b} > 1$

3.3.8 Coniche 4.2.1: Iperbole equilatera riferita ai suoi assi di simmetria con fuochi sull'asse x

$$\mathcal{I} : x^2 - y^2 = a^2$$

$c = a\sqrt{2} \qquad a = b$
$\mathcal{I} \cap x \equiv \qquad V_1(-a, 0) \quad V_2(a, 0)$
$F_1(-a\sqrt{2}, 0) \quad F_2(a\sqrt{2}, 0); \qquad F_1, F_2 \in x$
$P(x', y') \in \mathcal{I} \leftrightarrow |\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a$
$a_1 : y = x$
$a_2 : y = -x$
$e = \sqrt{2}$

3.3.9 Coniche 4.2.2: Iperbole equilatera riferita ai suoi assi di simmetria con fuochi sull'asse y

$$\mathcal{I} : x^2 - y^2 = -a^2$$

$c = a\sqrt{2} \qquad a = b$
$\mathcal{I} \cap y \equiv \qquad V_1(0, -a) \quad V_2(0, a)$
$F_1(0, -a\sqrt{2}) \quad F_2(0, a\sqrt{2}); \qquad F_1, F_2 \in y$
$P(x', y') \in \mathcal{I} \leftrightarrow |\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a$
$a_1 : y = x$
$a_2 : y = -x$
$e = \sqrt{2}$

3.3.10 Coniche 4.3: Iperbole equilatera riferita ai suoi asintoti

$$\mathcal{I} : xy = k$$

$$\begin{cases} k > 0 \quad \rightarrow \quad \mathcal{I} \cap b_{I,III} : y = x \equiv \qquad V_1(\sqrt{k}, \sqrt{k}) \quad V_2(-\sqrt{k}, -\sqrt{k}) \\ k > 0 \quad \rightarrow \quad \mathcal{I} \cap b_{II,IV} : y = -x \equiv \qquad V_1(\sqrt{|k|}, -\sqrt{|k|}) \quad V_2(-\sqrt{|k|}, \sqrt{|k|}) \end{cases}$$

leftrightarrow $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a$
$a_1 : x = 0$
$a_2 : y = 0$
$e = \sqrt{2}$

3.3.11 Coniche 4.4: Iperbole equilatera traslata o Funzione omografica

$$\mathcal{I} : y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

$\exists\mathcal{I} \leftrightarrow \begin{cases} c \neq 0 \\ ad - bc \neq 0 \end{cases}$
$a_1 : x = -\frac{d}{c}$
$a_2 : y = \frac{a}{c}$
$e = \sqrt{2}$

3.3.12 Coniche 5: Conica generica

$$\mathcal{C} : a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a12xy + a_{13}x + a_{23}y + a33 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{1}{2}a_{21} & \frac{1}{2}a_{13} \\ \frac{1}{2}a_{12} & a_{22} & \frac{1}{2}a_{23} \\ \frac{1}{2}a_{13} & \frac{1}{2}a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{1}{2}a_{21} \\ \frac{1}{2}a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$\left\langle \begin{array}{lll} |A| = 0 & \longrightarrow & \text{Conica Degenere} \\ |A| \neq 0 & \longrightarrow & \text{Conica Non Degenere} \end{array} \right.$

	$\lvert\overline{A}\rvert > 0$	$\lvert\overline{A}\rvert = 0$	$\lvert\overline{A}\rvert < 0$
$\lvert A\rvert = 0$	retta immaginaria	rette reali o immaginarie parallele	retta reale
$\lvert A\rvert \neq 0$	ellisse	parabola	iperbole

Tabella 3.4: Conica Generica

3.4 Trasformazioni: Affinità[1]

$\mathcal{T} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
$\quad (x, y) \to (x', y')$

[1] prof.ssa Letizia Lorenzini

$$\begin{cases} \text{x=ax+by+p} \\ \text{y=cx+dy+q} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$|A| \neq 0$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{-1} :& \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ & (x', y') \to (x, y) \end{aligned}$$

$\frac{S'}{S} = |A|$

$\begin{cases} \text{x=d}\frac{}{|A|x' + \frac{-b}{|A|}y' + \frac{-d}{|A|}p + \frac{b}{|A|}q} \\ \text{y=-c}\frac{}{|A|x' + \frac{a}{|A|}y' + \frac{c}{|A|}p + \frac{-a}{|A|}q} \end{cases}$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{|A|} & \frac{-b}{|A|} \\ \frac{-c}{|A|} & \frac{a}{|A|} \end{pmatrix}$

Definizione 37 (Punto Unito) *Punti uniti sono i punti che coincidono con i trasformati.*

Definizione 38 (Retta Unita) *Rette unite sono le rette che coincidono con le trasformate.*

3.4.1 Prodotto di Affinità

Il prodotto di due affinità $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ è una affinità (indicata con $\mathcal{T} * \mathcal{T}'$, dove si applica per prima $\mathcal{T}'$ e successivamente $\mathcal{T}$) la cui matrice è pari al prodotto delle matrici delle affinità di partenza.

3.4.2 Casi Particolari di Affinità

L'effetto geometrico di un'affinità coincide con la composizione di

- inclinazioni;
- simmetrie;
- dilatazioni/compressioni;
- traslazioni.

Isometria

Definizione 39 (Isometria) *L'*isometria *è un'affinità che conserva le distanze.*

Traslazione

$$\begin{cases} x' = x+p \\ y' = y+q \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 1$$

Rotazione

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta & x = x'\cos\theta + y'\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta & y = -x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$|A| = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$|A^{-1}| = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\begin{cases} x' = ax - by \\ y' = bx + ay \end{cases} \rightarrow a^2 + b^2 = 1$$

Rototraslazione

$$\rho : \begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases} \quad \tau : \begin{cases} x' = x+p \\ y' = y+q \end{cases}$$

$$\tau * \rho : \begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta + p \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta + q \end{cases}$$

Simmetria Centrale

$$\begin{cases} \mathrm{x}' = 2\mathrm{x}_0 - x \\ \mathrm{y}' = 2\mathrm{y}_0 - y \end{cases}$$

con (x_0, y_0) *centro di simmetria.*

Simmetria Assiale

Simmetria Assiale con asse parallelo all'asse x

Asse: $y = y_0 \rightarrow \begin{cases} \mathrm{x}' = \mathrm{x} \\ \mathrm{y}' = 2\mathrm{y}_0 - y \end{cases} \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$

Simmetria Assiale con asse parallelo all'asse y

Asse: $x = x_0 \rightarrow \begin{cases} \mathrm{x}' = 2\mathrm{x}_0 - x \\ \mathrm{y}' = \mathrm{y} \end{cases} \quad |A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$

Simmetria Assiale con asse qualsiasi

Asse: $y = mx + q \rightarrow \begin{cases} x'=\frac{1}{1+m^2[(1-m^2)x+2my-2mq]} \\ y'=\frac{1}{1+m^2[2mx+(m^2-1)x+2q]} \end{cases}$ $|A| = \begin{vmatrix} \frac{1-m^2}{1+m^2} & \frac{2m}{1+m^2} \\ \frac{2m}{1+m^2} & \frac{m^2-1}{1+m^2} \end{vmatrix} = -1$

Omotetia

$\begin{array}{l} x'=ax+h \\ y'=ay+k \end{array}$ $|A| = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} = a^2 > 0$

Similitudine

Isometria * Omotetia = Similitudine

Similitudine Diretta

$\begin{array}{l} x'=ax-by+p \\ y'=bx+ay+q \end{array}$ $|A| = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 > 0$

Similitudine Inversa

$\begin{array}{l} x'=ax+by+p \\ y'=bx-ay+q \end{array}$ $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ b & -a \end{vmatrix} = a^2 - b^2 < 0$

Dilatazione e Compressione

$|k| > 1 \rightarrow$ dilatazione
$|k| < 1 \rightarrow$ compressione

Dilatazione/Compressione lungo l'asse x

x'=kx
y'=y

Dilatazione/Compressione lungo l'asse y

x'=x
y'=ky

Inclinazione

Inclinazione lungo l'asse x

x'=x+ky
y'=y

Inclinazione lungo l'asse y

x'=x
y'=y+kx

3.4.3 Proprietà Invarianti delle Affinità

- Un'affinità trasforma rette in rette;
- se due rette si intersecano in un punto P allora le rette trasformate si intersecano in $\mathcal{T}(P)$;
- un'affinità trasfrorma triangoli in triangoli;
- un'affinità trasforma rette parallele in rette parallele;
- i punti del segmento PQ vengono trasformati in punti del segmento $\mathcal{T}(P)\mathcal{T}(Q)$;
- il punto medio del segmento PQ viene trasformato nel punto medio del segmento $\mathcal{T}(P)\mathcal{T}(Q)$;
- un triangolo di area $\mathcal{S}$ viene trasformato in un triangolo di area $\mathcal{S}\cdot|det(A)|$;
- un'affinità trasforma coniche in coniche: ellissi in ellissi, parabole in parabole, iperboli in iperboli, circonferenze in ellissi;
- la retta tangente ad una conica si trasforma in un'altra retta tangente alla conica trasformata.

Capitolo 4

Analisi

4.1 Intervalli

Definizione 40 (Maggiorante $\|$Minorante$\|$) *$M\|m\|$ si dice* maggiorante $\|$minorante$\|$ *dell'insieme A se $\forall a \in A, M\|m\|$; si definisce quindi l'insieme $\mathcal{M}_A = \{M \in \mathbb{R} : \forall a \in A, M \geq a\}\|\Updownarrow_A = \{m \in \mathbb{R} : \forall a \in A, m \leq a\}\|$*

Definizione 41 (Estremo superiore (sup) $\|$ Inferiore (inf)$\|$) *Si definisce* estremo superiore (sup))$\|$ inferiore (inf) $\|$ *di A il più piccolo $\|$grande$\|$ dei maggioranti $\|$minoranti$\|$, ovvero valgono:*
$$\begin{cases} \forall a \in A, supA \\ \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{a} \in A : supA - \varepsilon \leq \bar{a} \leq supA \end{cases}$$
e, analogamente:
$$\begin{cases} \forall a \in A, infA \leq a \\ \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{a} \in A : infA \leq \bar{a} \leq infA + \varepsilon \end{cases}$$
Per definizione, se A è illimitato superiormente $\|$inferioremente$\|$ *allora si pone $supA = +\infty\|infA = -\infty\|$*

Definizione 42 (Insieme limitato/illimitato) *L'insieme A si dice* limitato superiormente $\|$inferiormente$\|$ *se esiste l'estremo superiore $\|$inferiore$\|$; si dice* limitato *se è limitato sia superiormente che inferiormente; si dice* illimitato superiormente $\|$inferiore$\|$ *se non è limitato superiormente $\|$inferiore$\|$, ossia se $\forall x \in \mathbb{R}, \exists a \in A : a \geq x\|\forall x \in \mathbb{R}, \exists a \in A : a \leq x\|$; si dice* illimitato *se è illimitato sia superiormente che inferiormente.*

Osservazione 4 *Sia $A \subset \mathbb{R}$. Allora A è limitato sse $\exists M \geq 0 : \forall x \in A|x| \leq M$.*

Definizione 43 (Massimo (max) $\|$minimo (min)$\|$) *Si definisce* massimo (max) $\|$minimo (min)$\|$ *l'estremo superiore $\|$inferiore$\|$ qualora appartenga all'insieme A. Valgono quindi:*
$$\begin{cases} \forall a \in A, maxA \geq a \\ maxA \in A \end{cases}$$
e, analogamente:
$$\begin{cases} \forall a \in A, minA \leq a \\ minA \in A \end{cases}$$

Definizione 44 (Intervallo) *$A \subset \mathbb{R}$ si dice* intervallo *se, dati $x, y : x < y$, allora $\forall z : x < z < y, z \in A$.*

Teorema 7 (Intervalli) *Se A è un intervallo, è necessariamente di uno dei seguenti quattro tipi:*

aperto $(a,b) =]a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$, *con* $a,b \in \bar{\mathbb{R}}$*;*

aperto a sx, chiuso a dx $(a,b] =]a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$, *con* $a \in \bar{\mathbb{R}}, b \in \mathbb{R}$*;*

chiuso a sx, aperto a dx $[a,b) = [a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$, *con* $a \in \mathbb{R}, b \in \bar{\mathbb{R}}$*;*

chiuso, compatto $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$, *con* $a,b \in \mathbb{R}$.

Notazione 1 (-A, $\lambda \cdot A, A+B$) *Dato A insieme, si definisce* $-A = \{-y \in \mathbb{R} : y \in A\}$.
Dato A insieme, $\lambda \in \mathbb{R}$, si definisce $\lambda \cdot A = \{\lambda \cdot x : x \in A\}$.
Dati A e B insiemi, si definisce $A + B = \{x \in \mathbb{R} : x = a + b, a \in A, b \in B\}$.

Osservazione 5 (Operazioni su inf e sup) $sup(A+B) = supA + supB, inf(A+B) = infA + infB$
$sup(-A) = -infA, inf(-A) = -supA$
$\lambda \geq 0 : sup(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot supA, inf(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot infA$
$\lambda \leq 0 : sup(\lambda \cdot A) = -\lambda \cdot infA, inf(\lambda \cdot A) = -\lambda \cdot supA$

Teorema 8 (Principio di Archimede) $\forall a > 0, \forall b \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} : na > b$

Teorema 9 (Principio del minimo intero) *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$; allora A ammette minimo.*

Teorema 10 (Densità di $\mathbb{Q}$) $\mathbb{Q}$ *è* denso *in* $\mathbb{R}$, *ovvero:*
$\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b, (a,b)_{\mathbb{Q}} \neq \emptyset$, *dove con* $(a,b)_{\mathbb{Q}}$ *si indica l'insieme* $\{x \in \mathbb{Q} : a < x < b\}$.

Definizione 45 (Intorno, Palla) *Sia $x_0 \in A$; fissato $\delta > 0$ si dice intorno di x_0 l'intervallo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, la cui ampiezza vale $2 \cdot \delta$.*

Definizione 46 (Punto interno) *Sia $A \subset \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$; x_0 si dice* punto interno di A *se* $\exists \delta > 0 : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset A$, *ovvero se* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A \neq \emptyset$.

Notazione 2 (Å, int$A$) *Si pone* $= intA \subset A$ *l'insieme dei punti interni di A.*

Definizione 47 (Punto di frontiera) *Sia $A \subset \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$; x_0 si dice* punto di frontiera di A *se* $\forall \delta > 0, (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A \neq \emptyset \land (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A^c \neq \emptyset$.

Definizione 48 (Punto di accumulazione) *Sia $A \subset \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$; x_0 si dice* punto di accumulazione di A *se* $\forall \delta > 0, (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$, *ovvero se* $\forall r > 0, \exists y \in A : y \neq x : y \in (x - r, x + r)$.

Notazione 3 (σA, frontiera di A) *Si pone σA l'insieme dei punti di frontiera di A, e si dice* frontiera di A.

Definizione 49 (Punto isolato) *Sia* $A \subset \mathbb{R}$ *e* $x_0 \in \mathbb{R}$*;* x_0 *si dice* punto isolato *di* A *se* x_0 *non è punto di accumulazione per* A*, ossia se* $\exists \delta > 0 : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A \setminus \{x\} = \emptyset$.

Notazione 4 ($\bar{A}$, chiusura di A) *Si pone* $\bar{A} = A \cup \sigma A$ *l'insieme dei punti interni o di frontiera di* A*, e si dice* chiusura di A.

Definizione 50 (Insieme aperto) *L'insieme* A *si dice* aperto *se* $A =$ *, ovvero se ogni elemento di* A *è interno, ovvero se* $\forall x_0 \in A$*,* A *è intorno di* x_0*, cioè* $\forall x_0 \in A, \exists r > 0 : (x - r, x + r) \subset A$.

Definizione 51 (Insieme chiuso) *L'insieme* A *si dice* chiuso *se* A^c *è aperto, ovvero se* $A = \bar{A}$.

Teorema 11 $\forall A \subseteq \mathbb{R}$*, l'insieme* $\bar{A}$ *è chiuso.*

Osservazione 6 *Gli unici insiemi contemporaneamente aperti e chiusi sono* $\mathbb{R}$ *e* $\emptyset$.

Teorema 12 *L'unione di insiemi aperti è aperto.*

4.2 Relazioni e Funzioni

4.2.1 Relazioni

Definizione 52 (Relazione) *Dati* A, B *insiemi, si definisce* $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ *e si dice che* $\mathcal{R}$ *è una* relazione *da* A *(*dominio*) a* B *(*codominio *o* immagine di A*).*
Se $\langle x, y \rangle \in \mathcal{R}$ *si dice che* x *è* in relazione *con* y *e si scrive* $x\mathcal{R}y$.
Una relazione $\mathcal{R}$ *può essere:*

R1, riflessiva $\forall x \in A, x\mathcal{R}x$;

R2, simmetrica $\forall x \in A, \forall y \in B, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y\mathcal{R}x$;

R2*, antisimmetrica $\forall x \in A, \forall y \in B, (x\mathcal{R}y) \wedge (x\mathcal{R}y) \Rightarrow x = y$;

R3, riflessiva $\forall x \in A, \forall y \in (A \cup B), \forall z \in B, (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) \Rightarrow (x\mathcal{R}z)$;

Una relazione $\mathcal{R}$ *soddisfacente le* `R1`, `R2` *e* `R3` *si dice d'*equivalenza.
Una relazione $\mathcal{R}$ *soddisfacente le* `R1`, `R2*` *e* `R3` *si dice d'*ordine*. Se inoltre vale la:*

R4, ordine totale $\forall x \in A, \forall y \in B, (x\mathcal{R}y) \vee (y\mathcal{R}x) \Rightarrow \top$

allora la relazione si dice di ordine totale*. Se non è verificata la* `R1` *si parla di relazione di* ordine stretto.

Osservazione 7 (Relazione d'ordine totale $\leq$) *Si può definire su* $\mathbb{R}$ *la relazione d'ordine totale* $\leq$ *definendo un insieme* P *(dei numeri positivi o nulli) verificante le proprietà:*

1. $(x \in P) \vee (-x \in P) \Rightarrow \top$;

2. $(x, y \in P) \Rightarrow (x + y, x \cdot y \in P)$;

e definendo quindi $x \geq y \Leftrightarrow x - y \in P$.
Da questa relazione si ricavano le altre relazioni d'ordine $\leq$ *(*$x \leq y \Leftrightarrow y \geq x$*),* $>$ *(strettamente maggiore,* $x > y \Leftrightarrow (x \geq y) \wedge (x \neq y)$*) e* $<$ *(strettamente nimore,* $x < y \Leftrightarrow (y \geq x) \wedge (x \neq y)$*).*

4.2.2 Funzioni

Definizione 53 (Funzione 1) *Data* f *relazione da* A *a* B*,* f *si dice* funzione *o* applicazione *da* A *in* B *sse* $\forall a \in A, \exists! b \in B : afb$ *e si scrive:*
$f : A \rightarrow B$;
$f : a \in A \rightarrow b \in B$, *f(a)=b.*
Se afb *si dice che* b *è immagine di* a *secondo* f *e si scrive* $b = f(a)$*, o che* a *è controimmagine di* b *secondo* f *e si scrive* $a = f^{-1}(b)$*.*

Definizione 54 (Funzione 2) *Una funzione è una terna di oggetti: l'insieme* A *detto* dominio*, l'insieme* B *detto* codominio *e una legge* f *che associ ad ogni elemento di* A *uno ed un solo elemento di* B*.*

Definizione 55 (Iniettività) *Una funzione* f *si dice* iniettiva *sse* $\forall b \in B, \exists!! a \in A : f(a) = b$*, ovvero se* $\forall a_1, a_2 \in A, f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$*, ovvero se* $\forall a_1, a_2 \in A : a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$*.*

Definizione 56 (Suriettività, Surgettività) *Una funzione* f *si dice* suriettiva *o* surgettiva *sse* $\forall b \in B, \exists a \in A : f(a) = b$*.*

Definizione 57 (Biiniettività, Bigettività, Biunivocità) *Una funzione* f *si dice* biiettiva *o* bigettiva *o* biunivoca *sse* f *è sia iniettiva che suriettivà, ovvero sse* $\forall b \in B, \exists! a \in A : f(a) = b$*. Si parla anche di funzione* invertibile*, in quanto si può definire* f^{-1} *tale che* $f \circ f^{-1} = Id_B, f^{-1} \circ f = Id_A$*, dove con* Id_A *e* Id_B *si intendono le funzioni identiche definite rispettivemente su* A *e* B*, ovvero* $Id_A : A \rightarrow A, x \rightarrow x$ *e* $Id_B : B \rightarrow B, x \rightarrow x$ *.*

Definizione 58 (Monotonia) *Una funzione* $f : A \rightarrow B$ *si dice* monotòna *se verifica una delle seguenti (e allora in particolare è come descritto):*

monotòna crescente in senso stretto $\forall x, y \in A, x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y)$;

monotòna crescente in senso debole o largo $\forall x, y \in A, x < y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$;

monotòna decrescente in senso stretto $\forall x, y \in A, x < y \Leftrightarrow f(x) > f(y)$;

monotòna decrescente in senso debole o largo $\forall x, y \in A, x < y \Leftrightarrow f(x) \geq f(y)$.

Teorema 13 *Sia $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervallo; allora f è iniettiva (e invertibile) sse è monòtona in senso stretto.*

Notazione 5 ($f+g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, $\lambda \cdot f$, $f \circ g$) *Date f e g due funzioni definite su dominio $A \subseteq \mathbb{R}$ e codominio $\mathbb{R}$, si definiscono:*

- $(f+g)(x) : A \to \mathbb{R}, x \to f(x) + g(x)$;
- $(f \cdot g)(x) : A \to \mathbb{R}, x \to f(x) \cdot g(x)$;
- $(\frac{f}{g})(x) : \{x \in A : g(x) \neq 0\} \Rightarrow \mathbb{R}, x \to \frac{f(x)}{g(x)}$;
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, (\lambda)(x) : A \to \mathbb{R}, x \to \lambda \cdot f(x)$.

Date $f : A \to B$, $g : B \to C$, si definisce:

- $(g \circ f)(x) : A \to C, x \to g(f(x))$,

e si dice che la funzione $g \circ f$ è la composizione *delle funzioni g e f.*

Definizione 59 (Funzione Lipschitziana) $f : I \to \mathbb{R} : \exists L > 0 : \forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|$, *$f$ è detta* Lipschitziana. *Il minimo L che verifica la definizione è detta* costante di Lpschitz *e f si dice* L-Lipschitziana.

Definizione 60 (Funzione Lipschitziana) $f : I \to \mathbb{R} : \exists L \geq 0 : \forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|^{\alpha}$, *$f$ è detta* Hölderiana *di esponente $\alpha > 0$. Si scrive: $f \in C^{0,\alpha}(I)$.*

4.3 Limiti e Forme Indeterminate

4.3.1 Definizione

Definizione 61 (Limite 1)

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \overset{def}{=} \forall \varepsilon > 0, \overbrace{\exists \delta_\varepsilon > 0 \ t.c. \ \forall x, |x - x_0| < \delta_\varepsilon}^{\exists \mathcal{I}_\varepsilon(x_0)} \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Definizione 62 (Limite 2)

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \overset{def}{=} \forall M > 0, \overbrace{\exists \delta_M > 0 \ t.c. \ \forall x, |x - x_0| < \delta_M}^{\exists \mathcal{I}_M(x_0)} \Rightarrow |f(x) > M$$

Definizione 63 (Limite 3)

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \ell \overset{def}{=} \forall \varepsilon > 0, \overbrace{\exists N_\varepsilon > 0 \ t.c. \ \forall x, |x| > N_\varepsilon}^{\exists \mathcal{I}_\varepsilon(\infty)} \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Definizione 64 (Limite 4)

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \stackrel{def}{=} \forall M > 0, \overbrace{\exists N_M > 0 \ t.c. \ \forall x, |x| > N_M}^{\exists \mathcal{I}_M(\infty)} \Rightarrow |f(x)| > M$$

Notazione 6 (Limite destro, Limite sinistro) *e quanto sopra vale solo per l'intervallo* $(x_0, x_0+\delta)\|(x_0-\delta, x_0)\|$*, allora si parla di* limite destro $\|$sinistro$\|$.

Teorema 14 *Cnes affinchè esiste il limite di una funzione in un punto, è che esistano in quel punto limite destro e sinistro e coincidano, ovvero:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

4.3.2 Forme Indeterminate

$\frac{0}{0}$
$\frac{\infty}{\infty}$
$0 \cdot \infty$
$+\infty - \infty$
0^0
∞^0
1^∞

4.3.3 Limiti Notevoli

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$$

$$lim_{x\to\infty} \frac{\mathcal{P}(n)}{\mathcal{Q}(n)} = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad p > q \wedge \frac{a}{b} > 0 \\ -\infty & \text{se} \quad p > q \wedge \frac{a}{b} < 0 \\ \frac{a}{b} & \text{se} \quad p = q \\ 0 & \text{se} \quad p < q \end{cases}$$

dove $\mathcal{P}(n) = a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \cdots + a_1 n + a_0$ e $\mathcal{Q}(n) = b_q n^q + b_{q-1} n^{q-1} + \cdots + b_1 n + b_0$

4.3.4 Altri Limiti ricavabili dai Limiti Fondamentali

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x+\sin x}{x} = 2$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^x \frac{1}{x} = e$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\log a}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\alpha x)}{x} = \alpha$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \log a$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\alpha^x}{x^\beta} = +\infty \text{ se } \alpha > 1 \text{ con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log x = 0 \text{ se } \alpha > 0 \text{ con } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to +\infty} (1+\frac{n}{x})^x = e^n \text{ con } n \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0 \text{ se } \alpha > 0 \text{ con } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^x}{x^\alpha} = +\infty \text{ con } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{n!}{n^p} = +\infty, \forall p \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{n!}{a^n} = +\infty, \forall a \in \mathbb{R}_0^+$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{n!}{n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\cdot\pi\cdot n}} = 1 \textbf{ Formula di Stirling}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!! \cdot \sqrt{2\cdot\pi\cdot n}} = 1 \textbf{ Formula di Wallis}$$

4.3.5 Operazioni su $\pm\infty$

$+\infty + \infty = +\infty$
$-\infty - \infty = -\infty$
$\infty \cdot \infty = \infty$

Sia $\ell \in R$.
$\ell + \infty = +\infty$
$\ell - \infty = -\infty$
$\ell \cdot \infty = \infty$ con $\ell \neq 0$
$\frac{\ell}{\infty} = 0$
$\frac{\infty}{\ell} = 0$ con $\ell \neq 0$
$+\infty^\ell = +\infty$ se $\ell > 0$
$+\infty^\ell = 0$ se $\ell < 0$
$\ell^{+\infty} = 0$ se $0 < \ell < 1$

$\ell^{+\infty} = +\infty$ se $\ell > 1$
$\ell^{-\infty} = +\infty$ se $0 < \ell < 1$
$\ell^{-\infty} = 0$ se $\ell > 1$

4.3.6 Teoremi sui Limiti

Siano: $f : A = (a, b) \subset \mathbb{R} \to R, x_0$ punto di accumulazione per $A, \ell = \lim_{x \to x_0} f(x); \ell' = \lim_{x \to x_0} f(x); \ell_1 = \lim_{x \to x_0} g(x); \ell_2 = \lim_{x \to x_0} h(x)$ tali che $\ell, \ell', \ell_1, \ell_2 \in \bar{\mathbb{R}}$.

Teorema 15 (dell'Unicità del Limite) *$\ell = \ell'$, ovvero $\exists \ell \longrightarrow \exists! \ell$.*

Teorema 16 (della Permanenza del Segno) *Sia $A = (a, b), x_0 \in [a, b]$. Se $\exists \ell \neq 0$ allora esiste $\mathcal{I}(x_0)$
in cui $f(x)$ ha lo stesso segno di ℓ (escluso al più x_0).*

Teorema 17 *$(\exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}, f(x) = g(x)) \Rightarrow (\exists \ell \Leftrightarrow \exists \ell_1 \wedge \ell = \ell_1)$.*

Teorema 18 (del Confronto o dei Carabinieri) *$\forall x \in (a, b) \setminus \{x_0\}, f(x) \leq g(x) \leq h(x) \wedge \ell = \ell_2 \longrightarrow \ell_1 = \ell = \ell_2$.*

Teorema 19 (del Confronto) *$\forall x \in (a, b) \setminus \{x_0\}, f(x) \leq g(x) \wedge \ell = +\infty \| \ell_1 = -\infty \| \longrightarrow \ell_1 = +\infty \| \ell = -\infty \|$.*

Teorema 20 (Limite della Composizione di Funzioni) *Sia definita $g \circ f$.Se $\exists \lim_{y \to \ell} g(y) = \ell_1$ e vale una delle seguenti:*

1. *$\exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}, f(x) \neq \ell$;*

2. *$g(\ell) = \ell_1$ (continuità di g);*
   allora $\exists \lim_{x \to x_0} g \circ f(x) = \ell_1$.

4.3.7 Teoremi di de l'Hôpital

Teorema 21 (di de l'Hôpital 1) *Sia $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}, x_0 \in [a, b]$. Siano valide le ipotesi:*

1. *f, g derivabili in (a, b);*

2. *$\forall x \in (a, b) \setminus \{x_0\}, g'(x) \neq 0$;*

3. *$f(x_0) = g(x_0) = 0$;*

4. *$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \bar{\mathbb{R}}$.*

Allora:

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

Eventualmente, si considera l'unico limite calcolabile.

Teorema 22 (di de l'Hôpital 2) *Sia $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}, a, b \in \bar{\mathbb{R}}$. Siano valide le ipotesi:*

1. *f, g derivabili in (a, b);*
2. *$\forall x \in (a, b), g'(x) \neq 0$;*
3. *$\exists \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty; \exists \lim_{x \to a^+} g(x) = \pm\infty$;*
4. *$\exists \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \bar{\mathbb{R}}$.*

Allora:

$$\exists \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

Lo stesso risultato vale per $x \to b^-$.

4.3.8 Proprietà sui Limiti

Siano $\ell = \lim x \to x_0 f(x); \ell_1 = \lim x \to x_0 g(x); \ell_2 = \lim x \to x_0 h(x)$ tali che $\ell, \ell_1, \ell_2 \in R$.
Siano: $\alpha, \lambda, \mu, \in R; a \in R_0^+ \setminus \{1\}; b \in R_0^+; n \in \mathbb{N}$
Sia: $x_0 = \in R$ oppure $x_0 = \pm\infty$. Allora:

- $\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \ell + \ell_1$
- $\lim_{x \to x_0} [\lambda f(x) + \mu \cdot g(x)] = \lambda \cdot \ell + \mu \cdot \ell_1$
- $\lim_{x \to x_0} [f(x)]^n = \ell^n$ con $\ell > 0$
- $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\ell} \Leftrightarrow \ell \neq 0$
- $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$
- $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{\ell_1} \Leftrightarrow \ell_1 \neq 0$
- $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |\ell|$
- $\lim_{x \to x_0} \log_a f(x) = \log_a \ell$
- $\lim_{x \to x_0} b^f(x) = b^\ell$
- $\lim_{x \to x_0} [f(x)]^{g(x)} = \ell^{\ell_1}$ con $\ell > 0$

4.3.9 Limiti di Funzioni Monotòne

Teorema 23 *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}, a, b \in \bar{\mathbb{R}}, a < b$, una funzione monotòna crescente $\|$ decrescente$\|$, $s_0 \in (a, b)$; allora:*

$$\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = sup\{f(y) : y < x_0\} \| = inf\{f(y) : y < x_0\} \| = supf((a, x_0)) \| = supf((a, x_0)) \|$$

e:

$$\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = inf\{f(y) : y > x_0\} \| = sup\{f(y) : y > x_0\} \| = inff((x_0, b)) \| = inff((x_0, b)) \|$$

Se $x_0 \in \sigma(a, b)$, allora il teorema è vero per l'unico limite che si può calcolare.

4.3.10 Infinitesimi

Definizione 65 (Infinitesimo) *Sia $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$, siano f, g due funzioni definite in un intorno di x_0 escluso al più x_0 tali che $f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$. Si dice che f è* infinitesima di ordine superiore a *g* per *$x \to x_0$ o che f è un* o piccolo *di g per $x \to x_0$ e si scrive $f = o(g, x_0)$ o semplicemente $f = o(g)$ se:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Notazione 7 (Funzioni Infinitesime) *Funzioni che hanno limite uguale a 0 per $x \to x_0$ si dicono* infinitesime *e si indicano con $o(1, x_0)$.*

Definizione 66 (Infinitesimi di ordine α) *Sia $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$; se $\exists \alpha > 0 : \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x - x_0)^\alpha} = \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, si dice che f è un* infinitesimo di ordine α per *$x \to x_0$ e che la sua* parte principale *è $(x - x_0)^\alpha$. Analogamente per limite sx e per limite dx.*

Osservazione 8 (Proprietà o piccoli) *Se $f_1 = o(g, x_0), f_2 = o(g, x_0)$, allora:*

1 *$f_1 + f_2 = o(g, x)$;*

2 *$\forall k \in \mathbb{R}, kf = o(kg, x_0) = o(g, x_0)$.*

Se $f_1 = o(g_1, x_0), f_2 = o(g_2, x_0)$, allora:

3 *$\frac{f_1 + g_1}{f_2 + g_2} = \frac{g_1}{g_2}$ in un intorno di x_0, cioè esiste un limite sse esiste l'altro, e sono uguali.*

4 *$\forall x, l > 0, x^k = o(x^l, x_0) = o(x^{l+k}, x_o)$;*

5 *$f_1 \cdot f_2 = o(g_1 \cdot g_2, x_0)$;*

inoltre, se $f = o(g, x_0), g = 0o(h, x_0)$, allora:

6 $f = o(h, x_0)$;

Teorema 24 *Sia* $x_0 \in \mathbb{R}, f$ *continua in* x_0 *e invertibile in un intorno di* x_0 *tale che* $f(x) = f(x_0) + a \cdot (x - x_0) + o(x - x_o, x_0), a \neq 0$. *Allora* $f^{-1}(y) = x_0 + \frac{1}{a} \cdot (y - y_0) + o(y - y_0, y_0)$ *dove* $y_0 = f(x_0)$.

Definizione 67 *Siano* f, g *definite in un intorno di* $x_0 \in \bar{\mathbb{R}} : f, g \neq 0$ *in tale intorno ad eccezione al più di* x_0. *Si dice che* f *è* asintotica *a* g *per* $x \to x_0$ *se* $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *e si indica con* $f \sim g$.

Osservazione 9 (Proprietà funzioni asintotiche) **1** $f \sim g \sim f$

2 $f \sim g \wedge g \sim h \Rightarrow f \sim h$

Osservazione 10 $f \sim g \Rightarrow (\exists \lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow \exists \lim_{x \to x_0} g(x))$.

4.4 Funzioni Continue

4.4.1 Definizione

Definizione 68 (Funzione Continua) $y = f(x)$ *si dice* continua *in* x_0 *se* $\lim x \to x_0 f(x) = f(x_0)$ *o,*
il che è lo stesso, se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ *t.c.* $\forall x, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Teorema 25 *Siano* f, g *continue in* x_0, $\lambda \in \mathbb{R}$. *Allora* $f + g, f \cdot g, \lambda \cdot f$ *sono continue in* x_0.
Se è definita $g \circ f$, *anch'essa è continua in* x_0.
Se è definita f^{-1}, *anch'essa è continua in* x_0.

Teorema 26 *Sia* $f : I \to \mathbb{R}$, *allora se* $f(x_0) > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ *in cui f(x)>0.*

Teorema 27 (di Weierstrass) *Ogni funzione continua in un intervallo chiuso* $[a, b]$ *con* $a, b \in R$ *è dotata di massimo e minimo assoluti nell'intervallo, ovvero:*

$$f([a, b]) = [\overset{inf}{x \in [a, b]} f(x), \overset{sup}{x \in [a, b]} f(x)]$$

e in particolare $\exists c_1, c_2 \in [a, b]$:

$$f(c_1) = \overset{inf}{x \in [a, b]} f(x), f(c_2) = \overset{sup}{x \in [a, b]} f(x)$$

Teorema 28 (dei Valori Intermedî) *Una funzione continua in un intervallo* I *assume nell'intervallo tutti i valori compresi tra il minimo* m *e il massimo* M, *ovvero, dati* $x, y : f(x) < f(y), \lambda \in \mathbb{R} : f(x) < \lambda < f(y)$, *allora* $\forall \lambda, \exists z \in I : f(z) = \lambda$.

Teorema 29 (dell'Esistenza degli Zeri o di Bolzano) *Se una funzione continua su un intervallo assume valori di segno opposto in due punti $x - 1$ e x_2 dell'intervallo, allora esiste almeno un punto interno all'intervallo $]x_1, x_2[$ in cui $f(x) = 0$, ovvero, data $f : [a, b) \to \mathbb{R}$, continua in $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}, a < b$: $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora $\exists c \in (a, b) : f(c) = 0$.*

4.5 Derivate

4.5.1 Definizione

Definizione 69 (Rapporto Incrementale) *Sia I intervallo con x_0 punto interno di I; si dice* rapporto incrementale *in x_0 la funzione:*

$$R_{x_0}f(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

definita in $I \setminus \{0\}$.

Definizione 70 (Derivata) *f è derivabile in x_0 se $\exists \lim x \to x_0 R_{x_0} f(x) \in \mathbb{R}$ e si denota con:*

$$f'(x) = D[f(x)] = \frac{df}{dx} = \dot{f}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{x \to x_0} R_{x_0} f(x).$$

Analogamente si definiscono le derivate destra e sinistra. Se possono calcolarsi derivata destra e sinistra, allora esiste la derivata e coincide con derivata dx e sx.

Teorema 30 *Se $f : I \to \mathbb{R}$ è derivabile in x_0, allora f è continua in x_0, ma non viceversa.*

Notazione 8 (Differenziabilità) $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} 0 f')x_0) + o(1, x_0)$
$f(x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + (x - x_0) \cdot o(1, x_0)$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + o(x - x_0, x_0)$$

Definizione 71 (Differenziabilità) *Sia $f_I \to \mathbb{R}, x_0$ punto interno di I; f si dice* differenziabile *in x_0 se $\forall x \in I, \exists L > 0 : f(x) = f(x_=) + L \cdot (x - x_0) + o(x - x_0, x_0)$.*

Definizione 72 (Derivata Seconda, k-esima) $f''(x_0) = \frac{d^2}{dx^2} = \ddot{f}(x) = \frac{d}{dx} f'(x)$. $f^{(k)}(x_0) = \frac{d^k}{dx^k} = \frac{d}{dx} f^{(k-1)}$.

Notazione 9 (Classe C^k) *$f \in C^k, k \in \mathbb{N}, k \geq 1$ sta ad indicare che f è derivabile k volte in I con derivate continue in I (in particolare, è continua $f^{(k)}$. In particolare, $C^0(I) = C(I)$ denota lo spazio vettoriale delle funzioni continue in I; $C^{+\infty}(I)$ denota l'insieme delle funzioni che ammettono derivate di ogni ordine in I e tali che $\forall k, \frac{d^k}{dx^k} f \in C(I)$.*

Osservazione 11 *I polinomî appartengono a* $C{+}\infty(\mathbb{R})$ *con la proprietà* $\frac{d^k}{dx^k}P = 0$ *se* $k > \mathsf{deg}P$.
$e^x \in +\infty(\mathbb{R})$.

Teorema 31 *La funzione* $f : I \to \mathbb{R}$ *è differenziabile in* x_0 *punto interno di* I *sse è derivabile in* x_0 *e in tal caso* $L = f'(x)$.

Teorema 32 *Siano* $f, g : I$
$rightarrowmathbbR, x_0$ *punto interno di* I, $f \equiv g$ *in un intorno di* x_0*; allora* f *è derivabile in* x_0 *sse lo è* g *e in tal caso* $f'(x_0) = g'(x_0)$.

4.5.2 Proprietà locali di una funzione

Osservazione 12 (Derivata prima e monotonia) *Sia* $f : I \to \mathbb{R}$ *derivabile in* x_0 *e debolmente crescente* $\|$*decrescente*$\|$ *in un intorno di* x_0. *Allora* $f'(x_0) \geq 0\| \leq 0\|$.

Definizione 73 (Punto di Massimo ‖Minimo‖ relativo debole (locale)) *Sia* $f : I \to \mathbb{R}$ *derivabile in* $x_0 \in I$*;* x_0 *si dice* punto di massimo ‖minimo‖ relativo debole (locale) *di* f *se* $\forall x \in I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \exists \delta > 0 : f(x) \leq f(x_0)\| \geq f(x_0)\|$.

Definizione 74 (Punto di Massimo ‖Minimo‖ relativo forte (stretto)) *Sia* $f : I \to \mathbb{R}$ *derivabile in* $x_0 \in I$*;* x_0 *si dice* punto di massimo ‖minimo‖ relativo forte (stretto) *di* f *se* $\forall x \in I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \exists \delta > 0 : f(x) < f(x_0)\| > f(x_0)\|$.

Definizione 75 (Punto di Massimo ‖Minimo‖ assoluto) x_0 *di dice* punto di massimo ‖minimo‖ assoluto *di* f *se* $\forall x \in I, f(x) \leq \| \geq \| f(x_0)$.

Definizione 76 (Punto stazionario) *Se* x_0 *è tale che* $f'(x_o)$ *allora* x_0 *è detto* punto stazionario *di* f.

Teorema 33 (Fermat) *Sia* $f : I \to \mathbb{R}$ *derivabile in* x_0, *sia* $x_0 \in I$ *estremo relativo, allora* $f'(x_0) = 0$.

Teorema 34 (Conseguenza 1 Teorema di Lagrange) *Sia* $f : I \to \mathbb{R}$ *continua in* I *e derivabile nei punti interni di* I, *con derivata prima positiva (strettamente positiva, negativa, strett. negativa) in tali punti. Allora* f *è crescente (decrescente, str. crescente, str. decrescente) in tale intervallo.*

Teorema 35 (Conseguenza 2 Teorema di Lagrange) *Sia* $f : I \to \mathbb{R}$ *continua in* I *e derivabile nei punti interni di* I, *con derivata prima nulla in tali punti. Allora* f *è costante in tale intervallo.*

Criterio 1 (Massimi, minimi relativi) *Se* $\exists \delta > 0 : f'(x) \leq 0(\geq)$ *in* $(x_0 - \delta, x_0)$ *e* $f'(x) \geq 0(\leq 0)$ *in* $(x_0, x_0{+}\delta)$ *allora* x_0 *è un punto di minimo (massimo) relativo di* f. *Se le disuguaglianze valgono con i segni forti, allora* x_0 *è punto di minimo (massimo) relativo stretto.*

Teorema 36 *Sia* $f : I \to \mathbb{R} \in C^2, f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0(<), x_0$ *punto interno di* I. *Allora* x_0 *è punto di minimo (massimo) relativo forte di* f, *e viceversa condizione necessaria affinchè* x_0 *sia punto di minimo (massimo) relativo forte è che* $f''(x_0) \geq (\leq) 0$.

4.5.3 Convessità

Definizione 77 (Funzione Convessa) $f : I \to \mathbb{R}$ *si dice* convessa *se:*
$\forall x_0, x_1 \in I : x_0 < x_1, \forall t \in [0,1], f(t \cdot x_0 + (1-t) \cdot x_1) \leq t \cdot f(x_0) + (1-t) \cdot f(x_1)$.

Definizione 78 (Funzione Concava) f *si dice* concava *se* $-f$ *è convessa.*

Teorema 37 *Sia* f *convessa in* I*; allora:*
$\forall x > x_0, f(x) \geq f(x_0) + f'_+(x_0) \cdot (x - x_0)$*;*
$\forall x < x_0, f(x) \geq f(x_0) + f'_-(x_0) \cdot (x - x_0)$.

Definizione 79 (Punto di flesso) $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $x : 0$ *punto interno di* $I : f$ *convessa (concava): in* (a, x_0) *e concava (convessa) in* (x_0, b). x_0 *si dice* punto di flesso *per* f. x_0 *si dice* flesso ascendente (discendente) *se* f *è localmente crescente (decrescente) in un intorno di* x_0.

Definizione 80 (Asintoto obliquo) $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ *ha* asintoto obliquo *a* $+\infty$ *se* $\lim_{x\to+\infty} = \pm\infty$ *e:*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

;

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - a \cdot x = b \in \mathbb{R}$$

.
In questo caso l'asintoto obliquo è $y : a \cdot x + b$.

Osservazione 13 f, g *convesse in* $I \Rightarrow f + g$ *convessa in* I.

4.5.4 Teoremi

Teorema 38 (di Rolle) *Sia* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continua in* $[a,b]$ *e derivabile su* (a,b) *e sia* $f(a) = f(b)$*; allora* $\exists x_0 \in (a,b)$ *t.c.* $f'(x_0) = 0$.

Teorema 39 (di Lagrange o del Valor Medio) *Sia* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continua in* $[a,b]$ *e derivabile in* (a,b)*; allora* $\exists x_0 \in]a,b[$ *t.c.* $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0)$.

Teorema 40 (di Cauchy) *Siano* $f(x)$ *e* $g(x)$ *due funzioni continue su* $[a,b]$ *e derivabili su* $]a,b[$ *e sia* $g'(x) \neq 0 \forall x \in [a,b]$*; allora* $_0 \in]a,b[$ *t.c.* $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

4.5.5 Teoremi Funzioni Convesse

Teorema 41 (1) *Sia* $f : I \to \mathbb{R}$ *convessa; siano* $x_0, x_1 \in I : x_0 < x_1$. *Allora*
$\forall x \in [x_0, x_1], f(x) \leq f(x_0) + \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \cdot (x - x_0) \stackrel{def}{=} r_{x_0x_1}(x)$*;*
$\forall x \notin [x_0, x_1], f(x) \geq r_{x_0x_1}(x)$.

Teorema 42 (2) *Siano $f : I \to \mathbb{R}$ convessa in I, r una retta; Se $\exists x_0 < x_1 < x_2 \in I : f(x_j) = r(x_j), j = 0, 1, 2$ allora $\forall x \in [x_0, x_2], f(x) = r(x)$.*

Teorema 43 (3) *Sia $f : I \to \mathbb{R}$, sia $x_0 \in I$. Sia:*
$R_{x_0} f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$,
$R_{x_0} f(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$,
allora f è convessa in I sse $R_{x_0} f$ è crescente in $I \setminus \{x_0\}$. Eventualmente, si considera l'unico rapporto incrementale calcolabile.

Teorema 44 *Sia f convessa in I; allora è continua in tutti i punti interni di I in quanto $\exists \lim R_{x_0} f(x)$.*

Teorema 45 (Convessità-derivabilità) *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabile in (a, b); f è convessa (concava) in (a, b) sse f' è crescente (decrescente) in (a, b), è strettamente convessa (concava) se f' è str. crescente (decrescente).*

4.5.6 Derivate Fondamentali

$f(x)$	$f'(x)$
k	0
x^n	nx^{n-1}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x$	$-1 - \cot^2 x$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \log a$
$\log x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{log_a e}{x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\mathsf{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Tabella 4.1: Derivate Fondamentali

4.5.7 Regole di Derivazione

Siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ derivabili in x_0, x_0 punto interno di I, $\lambda \in \mathbb{R}$; allora valgono i seguenti teoremi algebrici o regole di derivazione.
pag.**??**

Osservazione 14 (Conseguenza) *I polinomî sono derivabili in $\mathbb{R}$ e la derivata di un polinomio di grado n è un polinomio di grado $n - 1$.*

$y = f(x) \pm g(x)$	$y' = f'(x) \pm g'(x)$
$y = k \cdot f(x)$	$y' = k \cdot f'(x)$
$y = f(x) \cdot g(x)$	$y' = f'(x) \cdot g(x) + f(cx) \cdot g'(x)$
$y = \frac{f(x)}{g(x)}$	$y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(cx) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
$y = f(g(h(x)))$	$y' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$
$y = [f(x)]^{g(x)}$	$y' = [f(x)]^{g(x)} \cdot [g'(x) \cdot \log f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}]$

Tabella 4.2: Regole di Derivazione

Teorema 46 (Derivabilità della funzione inversa) *Sia f strettamente monotòna definita in I e ivi continua, derivabile in x_0 punto interno di I tale che $f'(x_0) \neq 0$, allora f è invertibile e la sua inversa è derivabile in $f(x_0)$. Inoltre:*
$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$
$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

4.6 Integrali

4.6.1 Definizione

Definizione 81 (Integrale) $\int f(x)\,dx = F(x) + c \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$
$F(x)$ si dice primitiva *di $f(x)$.*

Teorema 47 (di Torricelli-Barrow) $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

4.6.2 Integrale di Riemann

Definizione 82 (Partizione) *Si dice* partizione *di $[a, b]$ ogni insieme di punti $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$. Data δ partizione di $[a, b]$, si ha:*

$$[a, b] = \bigcup_{j=0}^{n-1} [t_j, t_{j+1}$$

]

Notazione 10 (Somme superiori e inferiori)

$$s(f, \delta) = \{\sum_{j=0}^{n-1} \overset{\textsf{inf}}{t} \in [t_j, t_{j+1}\ f(t) \cdot (t_{j+1} - t_j)\}$$

$$S(f, \delta) = \{\sum_{j=0}^{n-1} \overset{\textsf{sup}}{t} \in [t_j, t_{j+1}\ f(t) \cdot (t_{j+1} - t_j)\}$$

Definizione 83 (Funzione Riemann-integrabile) *f è* integrabile *se esiste unico l'elemento separatore tra $s(f)$ e $S(f)$ ovvero se $\mathsf{sup}s(f) = \mathsf{inf}S(f)$. Tale* *elemento separatore si dice* integrale *di f in $[a,b]$ e si scrive:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mathsf{sup}s(f) = \mathsf{inf}S(f)$$

ovvero $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata è integrabile in $[a,b]$ se $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta : S(f,\delta) - s(f,\delta) \leq \varepsilon$.

Osservazione 15 (Conseguenza) *f monotòna è integrabile.*
f continua è integrabile.
Lo spazio $\mathcal{R}$ delle funzioni integrabili è vettoriale e l'applicazione $\mathcal{R} \to \mathbb{R}, f \to \int_1^b f(t)\,dt$ è lineare.

Notazione 11 $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
$\int_a^a f(x)\,dx = 0$

Definizione 84 (Funzione integrale) *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ R-integrabile in $[a,b]$, $c \in [a,b]$ fissato; la funzione $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ definita da:*

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$$

si dice funzione integrale *di f.*

4.6.3 Teoremi

Teorema 48 (della Media) $\overset{inf}{[a,b]} f \leq \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx \leq \overset{sup}{[a,b]} f$

$$\exists c \in [a,b] \;\; t.c. \;\; f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

Teorema 49 (fondamentale del Calcolo Integrale) *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ R-integrabile in $[a,b]$; allora:*

1. *$\forall c \in [a,b], F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$ è lipschitziana e $|F(x) - F(y)| \leq \overset{\mathsf{sup}}{t \in [a,b]} |f(t)| \cdot |y-x|$;*

2. *se f è continua in $x_0 \in (a,b)$, allora F è derivabile in x_0 e $F'(x_0) = f(x_0)$;*

3. *se f è continua in a (b), allora F è derivabile a dx (sx) in a (b) e $F'_+(a) = f(a) (F'_-(b) = f(b))$;*

4. *$\forall \alpha, \beta \in [a,b] : \alpha \leq \beta, \int_\alpha^\beta f(x)\,dx = F(\beta) - F(\alpha)$*

4.6.4 Integrali Notevoli Fondamentali

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \text{ con } n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + c$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + c$$

$$\int (1+\tan^2 x)\,dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + c$$

$$\int (1+\cot^2 x)\,dx = -\tan x + c$$

$$\int e^x\,dx = e^x + c$$

$$\int a^x\,dx = a^x \cdot log_a e + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c$$

4.6.5 Regole di Integrazione

1a $\int k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx$

1b $\int [f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx + \cdots + \int f_n(x)\,dx$

2, monotonia $\forall x \in [a,b], f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

2bis $\forall x \in [a,b], g(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx \geq 0$

3, spezzamento $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

4.6.6 Altri Integrali Notevoli

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + c$$
$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{x}{2}\cdot\log(x+\sqrt{a^2+x^2}) + \frac{x}{2}\cdot\sqrt{a^2+x^2} + c$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx = \log|x+\sqrt{a^2+x^2}| + c$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a} + c$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\,dx = \log|x+\sqrt{x^2\pm a^2}| + c$$
$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\cdot\log|\frac{x-a}{x+a}| + c$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+px+q}}\,dx = \log|x+\frac{p}{2}+\sqrt{(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}}| + c$$
$$\int \cos\alpha x \cos\beta x\,dx = \frac{\sin(\alpha+\beta)x}{2(\alpha+\beta)} + \frac{\sin(-\beta)x}{2(\alpha-\beta)} + c$$
$$\int e^x\cdot\sin x\,dx = -\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x) + c$$
$$\int e^x\cdot\cos x\,dx = -\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x) + c$$

4.6.7 Integrali per Serie

$\mathcal{I}_n = \int \sin^{2n} x\,dx = \frac{1}{2n}[-\sin^{2n-1} x\cos x + (2n-1)\mathcal{I}_{n-1}]$ con $\mathcal{I}_0 = x + c; \mathcal{I}_1 = -\frac{1}{2}\sin x\cos x + \frac{1}{2}x + c$

$\mathcal{I}_n = \int \log^n x\,dx = x\log^n x - n\cdot\mathcal{I}_{n-1}$ con $\mathcal{I}_0 = x + c; \mathcal{I}_1 = x\log x - x + c$

$\mathcal{I}_n = \int x^n\cdot e^x\,dx = x^n\cdot e^x - n\cdot\mathcal{I}_{n-1}$ con $\mathcal{I}_0 = e^x + c; \mathcal{I}_1 = xe^x - x + c$

$\mathcal{I}_{n+1} = \int \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx = \frac{x}{2n\cdot(1+x^{2n})} + \frac{2n-1}{2n}\mathcal{I}_{n-1}$ con $\mathcal{I}_0 = \arctan x + c; \mathcal{I}_1 = \frac{x}{2(1+x^2)} + frac12 \arctan x + c$

4.6.8 Integrazione di Funzioni Goniometriche

$\int \sin^{2k+1} x\,dx = \int \sin^{2k} x \cdot \sin x\,dx = -\int (1-\cos^2 x)^k\,d\cos x$
$\int \sin^{2k} x\,dx = \frac{1}{2}\int (\frac{1-\cos 2x}{2})^k\,d2x$

4.6.9 Integrazione di Funzioni Razionali

$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{A_1}{(x-x_1)} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + + \frac{A_{r_1}}{(x-x_1)^{r_1}} + \frac{B_1}{(x-x_2)} + \frac{B_2}{(x-x_2)^2} + + \frac{R_{r_2}}{(x-x_2)^{r_2}} + \cdots +$

$\mathcal{I} = \int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}\,dx = \int Q(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{P_2(x)}\,dx$ dove vale $P_1(x) = P_2(x)\cdot Q(x) + R(x)$ ed è $\varrho R(x) < \varrho P_2(x)$
Considerato il caso in cui $\varrho P_2(x) = 2$ e quindi $\varrho R(x) = 0 \vee 1$, essendo $P_2(x) = ax^2 + bx + c$ con a, b, c costanti assegnate, dette α_1, α_2 le radici di $P_2(x) = 0$, definito $\Delta = b^2 - 4ac$, considerati A e B costanti in R, si hanno i seguenti tre casi, a seconda del segno di Δ:

1. $\Delta P_2(x) > 0 \longrightarrow \mathcal{I} = \frac{1}{a}\int \frac{A}{x-\alpha_1}\,dx + \frac{1}{a}\int \frac{B}{x-\alpha_2}\,dx = \frac{A}{a}\log|x-\alpha_1| + \frac{B}{a}\log|x-\alpha_2| + c$

2. $\Delta P_2(x) = 0 \longrightarrow \mathcal{I} = \frac{1}{a}\int \frac{A}{x-\alpha}\,dx + \frac{1}{a}\int \frac{B}{(x-\alpha)^2}\,dx = \frac{1}{a}A\log|x-\alpha| - \frac{A\alpha+B}{a(x-\alpha)} + c$

3. $\Delta P_2(x) < 0 \longrightarrow \mathcal{I} = \int \frac{gx+h}{ax^2+bx+c}\,dx = gs\int \frac{d(ax^2+bx+c)}{x^2+bx+c} + ht\int \frac{dx}{(kx+j)^2+1} = gs\log|ax^2+bx+c| + ht\arctan(kx+j) + c$

4.6.10 Tecniche di Integrazione

Integrazione per Sostituzione: $x = g(t) \longrightarrow \int f(x)\,dx = \int f(g(t))\cdot g'(t)\,dt$
Integrazione per Parti: $\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - (x)g'(x)\,dx$

4.6.11 Integrazione Numerica [1]

Metodo 1 (dei rettangoli) *Si approssima l'area sottesa alla curva alla somma di n rettangoli la cui base tende a 0 tendendo l'errore e a 0 e la cui altezza è pari al valore della funzione all'estremo sinistro o destro della base.*
$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{b-a}{n}\cdot[f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})]$
$e \leq \frac{(b-a)^2}{2n}\cdot M \text{ con } |f'(x)| \leq M$

Metodo 2 (dei trapezî) *Si approssima l'area sottesa alla curva alla somma di n trapezi la cui altezza tende a 0 tendendo l'errore e a 0 e le cui basi sono i valori della funzione all'estremo destro e sinistro della base.*
$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{b-a}{2n}\cdot[f(x_0) + f(x_n) + 2\cdot[f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})]]$

[1] Marcello Pedone, *Integrazione Numerica e Valutazione dell'errore*, `http://www.matematicamente.it`

$e \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot M \ con \ |f''(x)| \leq M$

Metodo 3 (di Cavalieri-Simpson) $\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{b-a}{3n} \cdot [f(x_0) + f(x_n) + 4 \cdot [f(x_1) + f(x_3) + \cdots] + 2 \cdot [f(x_2) + f(x_4) + \cdots]]$
$e \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} \cdot M \ con \ |f^{iv}(x)| \leq M$

4.6.12 Lunghezze di Archi di Curva, Volumi e Superfici di Solidi di Rotazione

$\ell = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \rightarrow \ell = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt$

$\mathcal{V} = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2\,dx$

Teorema 50 (di Guldino) *Il volume di un solido generato da una superficie piana $\mathcal{S}$ che compie una rotazione completa intorno ad una retta del suo piano che non l'attraversa è dato dal prodotto dell'area di $\mathcal{S}$ per la lunghezza della circonferenza descritta dal baricentro di $\mathcal{S}$.*

Teorema 51 (Regola di Archimede) *L'area di un segmento parabolico è i $\frac{2}{3}$ dell'area del rettangolo in cui è inscritto.*

$S_{laterale} = 2 \cdot \pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$

4.7 Polinomio di Taylor

Teorema 52 $n \in \mathbb{N}, \delta P = \delta Q = n : f(x) = P(x) + o((x-x_0)^n, x_0) = Q(x)o((x-x_0)^n, x_0) \Rightarrow P \equiv Q$

Teorema 53 (Polinomio e Formula di Taylor, Polinomio di Mac Laurin) *$f : (a,b) \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in (a,b)$, f derivabile $n-1$ volte in (a,b) e n volte in x_0. Allora la seguente è una approssimazione di f:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n, x_0)$$

e si dice polinomio di Taylor *di grado n centrato in x_0 il seguente:*

$$P_{n,x_0}f = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k$$

Per $x_0 = 0$ si ha il polinomio di Mac Laurin.

4.7.1 Formula di Taylor con resto di Lagrange

Teorema 54 *Sia* $f : (a, b) \to \mathbb{R}, x_0 \in (a, b), f$ *derivabile* $n+1$ *volte in* x_0*; allora* $\exists c = c(x) \in (\mathit{min}\{x_0, x\}, \mathit{max}\{x_0, x\})$:

$$f(x) = P_{n,x_0} f(x) + \frac{f^{(n+1)}(c(x))}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

4.7.2 Formula di Taylor con resto di integrale

$f : I \to \mathbb{R}, x_0 \in I, f \in C^n(I)$:

$$f(x) - P_n^{x_0} f(x) = \frac{1}{n!} \cdot \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)(t) \cdot (x-t)^n \, dt}$$

4.7.3 Sviluppi di Taylor

$$f(x) = P_{n,0} f + o(x^n, 0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k + o(x^n, 0)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n, 0)$$

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + o(x^n, 0)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}, 0)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}, 0)$$

$$\tan x = P_{6,0} \tan + o(x^6, 0) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2 \cdot x^5}{15} + o(x^6, 0)$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{3}{8} \cdot \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}, 0)$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \cdots - \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}, 0)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}, 0)$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}, 0)$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}, 0)$$

$$\tanh x = P_{6,0} \tanh + o(x^6, 0) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2 \cdot x^5}{15} + o(x^6, 0)$$

$$\mathsf{arcsinh} x = x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{3}{8} \cdot \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}, 0)$$

$$\mathsf{arctanh} x = \frac{1}{2} \cdot \log \frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}, 0)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha \cdot x + \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1)}{2} \cdot x^2 + \cdots + \frac{\alpha!}{(\alpha - n)! \cdot n!} \cdot x^n + o(x^n, 0)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n \cdot x^n + o(x^n, 0)$$

4.8 Studio di Funzione

1. Dominio;
2. Intersezione con gli assi;
3. Segno;
4. Limite (asintoti):
   (a) Asintoto Verticale: $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$;
   (b) Asintoto Orizzontale: $\lim_{x \to \infty} f(x) = \ell$: $\varrho den = \varrho num$;
   (c) Asintoto Obliquo: $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$: $\varrho den = \varrho num - 1$:
   $m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$
   $n = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx]$
   $A.Ob. : y = mx + n$

5. Derivata Prima: Crescenza$^+$/decrescenza$^-$; Punti di Massimo e Minimo Relativi^0;

6. Derivata Seconda: Concavità verso l'alto$^+$/basso$^-$; Punti di Flesso^0.

4.9 Approssimazione di Radici Reali

Metodo 1 (di Bisezione o Dicotomico) *Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a, b]$ t.c. $f(a) \cdot f(b) < 0$. Allora $f(x)$ si annulla in almeno un punto $x_0 \in]a, b[$ (☛ Teorema **??** a pag.**??**). Considerato il nuovo punto $f(\frac{a+b}{2})$, la radice si troverà tra $]a, \frac{a+b}{2}[[\Leftrightarrow f(a) \cdot \frac{a+b}{2} < 0$, oppure tra $]\frac{a+b}{2}, b[[\Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \cdot f(b) < 0$. Iterando il procedimento, si ottengono intervalli di soluzione con un'approssimazione sempre minore.*

Metodo 2 (della Secante) *Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a, b]$ t.c. $f(a) \cdot f(b) < 0$. Allora $f(x)$ si annulla in almeno un punto $x_0 \in]a, b[$ (☛ Teorema **??** a pag.**??**). Per determinare questo valore, si consideri la retta passante per i due punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$; questa retta intersecherà l'asse $x : y = 0$ in un punto c a cui corrisponderà $f(c)$. La radice si troverà tra $]a, c[[\Leftrightarrow f(a) \cdot f(c) < 0$, oppure tra $]c, b[[\Leftrightarrow f(c) \cdot f(b) < 0$. Iterando il procedimento, si ottengono intervalli di soluzione con un'approssimazione sempre minore.*

Metodo 3 (della Tangenteo di Newton) *Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a, b]$ t.c. $f(a) \cdot f(b) < 0$. Allora $f(x)$ si annulla in almeno un punto $x_0 \in]a, b[$ (☛ Teorema **??** a pag.**??**). Per determinare questo valore, si consideri la retta tangente alla curva in $(a, f(a))$ o $(b, f(b))$ e t.c. intersechi l'asse $x : y = 0$ in un punto $c \in]a, b[$ a cui corrisponderà $f(c)$. La radice si troverà tra $]a, c[[\Leftrightarrow f(a) \cdot f(c) < 0$, oppure tra $]c, b[[\Leftrightarrow f(c) \cdot f(b) < 0$. Iterando il procedimento, si ottengono intervalli di soluzione con un'approssimazione sempre minore.*

Capitolo 5

Combinatoria e Probabilità

5.1 Combinatoria

5.1.1 Fattoriale

Definizione 85 (Fattoriale) $n! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n = \prod_{i=1}^{n} i$

$$\begin{cases} 0\ !=1 \\ n\ !=n \cdot (n-1)\,!\ \textit{per}\ n \geq 1 \end{cases}$$

5.1.2 Coefficienti Binomiali

Definizione 86 (Coefficiente Binomiale) $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n\,!}{(n-k)\,!\,k\,!}$

$$\begin{pmatrix} \text{n} \\ \text{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{n} \\ \text{n-k} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \text{n} \\ \text{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{n-1} \\ \text{k-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{n-1} \\ \text{k} \end{pmatrix}$$

5.1.3 Combinazioni

- Natura.

$$\mathcal{P}_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$$
$$\mathcal{C}'_{n,k} = \begin{pmatrix} n+k-1 \\ k \end{pmatrix}$$

5.1.4 Permutazioni

- Ordine.

$$\mathcal{P}_n = n!$$
$$\mathcal{D}'^{\,k_1,k_2,\cdots,k_n}_{n} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \cdots \cdot k_n!}$$

5.1.5 Disposizioni

- Natura;
- ordine.

$\mathcal{D}_{n,k} = \mathcal{C}_{n,k} \cdot \mathcal{P}_k = \frac{n!}{(n-k)!}$
$\mathcal{D}'_{n,k} = n^k$

5.2 Probabilità

5.2.1 Definizioni

1. **Definizione Classica (Laplace)**: per casi *equiprobabili* è $p = \frac{f}{n}$;

2. **Definizione Frequentista (Legge dei Grandi Numeri o Legge Empirica del Caso**: $p = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{f}{n}$;

3. **Definizione Soggettivista**;
4. **Definizione Assiomatica**:
   (a) $p() = 0$

   (b) $p(\Omega) = 1$

   (c) $0 \leq f \leq n \to 0 \leq \frac{f}{n} \leq 1 \to 0 \leq p \leq 1$

   (d) $p(A^c) = p(\bar{A}) = 1 - p(A)0$

5.2.2 Probabilità Condizionata

$p(A \setminus B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$

5.2.3 Somma

- Per eventi *incompatibili* (tali cioè che $A \cap B = $): $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

- Per eventi *compatibili* (tali cioè che $A \cap B \neq $): $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B)$.

5.2.4 Prodotto

- Per eventi *stocasticamente indipendenti* (tali cioè che $p(A) = p(A \setminus B)$: $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$.

- Per eventi *stocasticamente dipendenti* (tali cioè che $p(A) \neq p(A \setminus B)$: $p(A \cup B) = p(A) \cdot p(B \setminus A)$.

5.2.5 Formula di Bayes

$$p(H_i \setminus E) = \frac{p(H_i) \cdot p(E \setminus H_i)}{\sum_1^n p(H_i) \cdot p(E \setminus H_i)}$$

5.2.6 Distribuzione Binomiale di Bernoulli

$$p_{n,k} = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

5.2.7 Speranza Matematica o Valor Medio

$\mathcal{M}(X) = \sum_1^n x_i p_i$

Capitolo 6

Cenni di Algebra Astratta

Definiamo *algebra* una struttura $[G; *_1, *_2, \cdots, *_k]$ dove G è un insieme (detto *insieme sostegno*, finito (nel qual caso della forma $G = \{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$) o infinito) e le $*_i$ (con i intero da 1 a $k \in \mathbb{N}$) sono *operazioni* r_i*-arie*, ovvero funzioni definite:

$$*_i : G^{r_i} \to G$$

con la convenzione che la successione r_i sia decrescente (andrebbe precisato che i simboli delle operazioni sono elementi di un definito alfabeto di algebra). r_i è detta *arietà* della funzione $*_i$, e $*_i$ è detta *operazione* r_i*-aria*; in tal caso, ancora, $*_i$ si scrive in funzione di r_i elementi di G: $*_i(g_1, g_2, \cdots, g_{r_i}) = g \in \mathbb{G}$. Solitamente, si considerano operazioni *binarie*, ovvero di arità 2 (in tal caso, si utilizzano le seguenti notazioni: prefissa ($*_i(g_1, g_2) = *_1 g_1 g_2$), infissa ($*_i(g_1, g_2) = g_1 *_i g_2$) o suffissa ($*_i(g_1, g_2) = g_1 g_2 *_i$)), o *ternarie* (di arietà 3), oppure ancora *unarie* (di arità 1: per esempio, l'identità, o l'inverso); a volte, si considerano anche operazioni *nullarie* o *zerarie* definite da $\{\emptyset\} \to G$, che equivalgono a fissare un elemento (una costante) in G (per esempio, lo zero, o l'unità). Si definisce gruppoide un'algebra avente struttura $[G; \cdot]$, dove $\cdot$ è un'operazione binaria (cioè: $\cdot : G^2 \to G$) in notazione additiva (eventualmente indicata da $*$); analogamente, si utilizza $[G; +]$ in notazione additiva; l'operazione si indica spesso anche con altri simboli. Un'algebra spesso, se ciò non porta ad ambiguità, è indicata semplicemente facendo riferimento al suo sostegno (specie se le operazioni vi sono definite naturalmente).
In una struttura algebrica di sostegno G, in riferimento ad una operazione $*$, si definiscono le proprietà (spesso attribuite al sostegno stesso o alla struttura):

associativa $\forall a, b, c \in G, (a * b) * c = a * (b * c)$

commutativa a sinistra $\forall a, b, c \in G, a * (b * c) = a * (c * b)$

commutativa a destra $\forall a, b, c \in G, (a * b) * c) = (b * a) * c$

commutativa $\forall a, b \in G, a * b = b * a$

idempotente $\forall a \in G, a^2 \overset{def}{=} a * a = a$

mediale $\forall a, b, c, d \in G, (a * b) * (c * d) = (a * c) * (b * d)$

In riferimento a due operazioni $*$ e $+$, si definiscono le proprietà:

distributiva a sinistra di $*$ rispetto a $+$ $\forall a, b, c \in G, a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$

distributiva a destra di $*$ rispetto a $+$ $\forall a, b, c \in G, (a + b) * c = (a * c) + (b * c)$

Un gruppoide associativo è detto *semigruppo*; una struttura commutativa è denotata con l'aggettivo *abeliano.*
Strutture con due operazioni sono definite analogamente bigruppoidi (con le varie proprietà); tra le due operazioni, in particolare, esisterà un collegamento, spesso rappresentato dalla proprietà distributiva. Chiamiamo *anello* un bigruppoide $[S; +, \cdot]$ dove $[S; +]$ è un gruppo, $[S; \cdot]$ un semigruppo e vale la distributiva di $+$ rispetto a $\cdot$. Chiamiamo *corpo* una struttura come sopra dove $[S; +]$ è un gruppo abeliano, $[S \setminus \{0\}; \cdot]$ un gruppo e vale la distributiva (con 0 si intende lo zero di S rispetto a $\cdot$); se $[S \setminus \{0\}; \cdot]$ è un gruppo abeliano, parliamo di *campo.*
Introduciamo quindi una struttura del tipo $[K, S; +, \cdot]$, dove sia $[S; +]$ un gruppoide e sia definita una operazione esterna (detta *moltiplicazione per scalare*) come: $\cdot : K \times S \to S, \langle k, s\rangle \mapsto ks$. Se $[S; +]$ è un gruppo abeliano, valgono le distributive (cioè $\forall k, k' \in K, \forall s \in S, (k + k') \cdot s = ks + ks'$ e $\forall k \in K, \forall s, s' \in S, k \cdot (s + s') = ks + ks'$), e vale la $\forall s \in S, 1 \cdot s = s$, allora si parla di *spazio vettoriale.*

Con $\mathbb{Z}_n$ denotiamo l'insieme quoziente $\mathbb{Z}/\sim$, dove la relazione di equivalenza $\sim$, fissato $m \in \mathbb{Z}$ è definita tra a e b se $a - b = km$ per un certo $k \in \mathbb{Z}$.

6.1 Principio di Induzione

6.1.1 Induzione Completa

Proposizione 2 (Induzione Completa) *Sia $\mathcal{P}(n)$ un predicato in n, $n \in \Omega$, Ω insieme totalmente ordinato (?), e sia $m = \mathsf{min}(\Omega)$;*

base $\mathcal{P}(m)$

passo $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$

allora:

$$\forall n \in \Omega, \mathcal{P}(n)$$

Proposizione 3 (Altre forme)

6.1.2 Induzione Trascendente

Proposizione 4 (Induzione trascendente)

Capitolo 7

Alfabeto Greco

A	α	alfa/alpha	angoli piani
B	β	beta	angoli piani
Γ	γ	gamma	angoli piani
Δ	δ	delta	area; $\Delta = b^2 - 4ac$ (*discriminante*)
E	ϵ/ε	epsilon	
Z	ζ	zeta	
H	η	eta	
Θ	θ/ϑ	theta	angoli
I	ι	iota	
K	κ	kappa	
Λ	λ	lambda	scalare di un vettore
M	μ	mu/mi	[SI]: micro (10^{-6})
N	ν	ni/nu	ν: frequenza
Ξ	ξ	xi	
O		omicron	
Π	π/ϖ	pi/pi greco	Π: produttoria; $\pi \simeq 3,14159265358979323846264338327 9...$
P	ρ/ϱ	rho	
Σ	σ/ς	sigma	Σ: sommatoria; σ: deviazione standard
T	τ	tau	τ: sezione aurea $(1,618...)$
Υ	υ	upsilon	
Φ	ϕ/φ	phi	ϕ: sezione aurea $(1,618...)$; $\phi(n)$: funzione di Eulero; $\Phi(\vec{V})$: flusso
X	χ	chi	
Ψ	ψ	psi	
Ω	ω	omega	angoli solidi

Tabella 7.1: Alfabeto Greco

Parte II

Bibliografia

Capitolo 8

Bibliografia

Richard Courant, Herbert Robbins, *Che cos'è la Matematica?*, Bollati Boringhieri, 2002, Seconda Edizione riveduta da Ian Stewart.

Massimo Gobbino, *Schede Olimpiche*, Pitagora, 2003, Prima Edizione.

Emilio Acerbi, Giuseppe Buttazzo, *Primo Corso di Analisi Matematica*, Pitagora Editrice, 1997, Prima Edizione.

Emilio Acerbi, *Matematica Preuniversitaria di Base*, Pitagora Editrice, 1997, Prima Edizione.

Enrico Giusti, *Analisi Matematica 1*, Bollati Boringhieri, 2002, Terza Edizione.

Parte III

Indici

Elenco delle tabelle

Indice